Une branche des maths abordée en prépa est l'étude de sommes infinies. Ce domaine particulièrement étudié au 18è siècle a commencé à intéresser très tôt les mathématiciens.
Lorsqu'on se donne une suite de nombres $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on cherche à savoir si on peut donner un sens à $u_0+u_1+u_2+\cdots$ en sommant donc une infinité de nombres. Autrement dit, on cherche si $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ tend vers une limite finie lorsque $n\to+\infty$.
Nous étudions ici des cas particuliers simples de ces objets appelés séries.

1. Le cas des suites géométriques

Dès le 14è Siècle, le mathématicien Oresme donne le résultat suivant sans aucune justification

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^3}+\cdots=\frac{1}{\lambda-1}$$

C'est le premier à introduire cette idée, mais pour lui, une série de grandeurs a toujours une somme, tantôt finie tantôt infinie.

Pour les suites géométriques, le résultat est simple à formaliser, puisqu'on sait expliciter S_n pour $n\in\mathbb{N}$. Précisons :

- Si (u_n) est la suite constante égale à 1, alors pour $n\in\mathbb{N}$, $S_n=1+1+\cdots+1=n+1$ (on somme $n+1$ termes tous égaux à 1). Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=1$.
- Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q\in\,]-1,1[$ et de premier terme 1, alors pour $n\in\mathbb{N}$, $S_n=1+q+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{1}{1-q}$.
- Si (S_n) est une suite géométrique de raison q et premier terme 1, avec $|q|>1$ ou $q=-1$, alors la suite (S_n) n'admet pas de limite finie.

Le cas où $q=-1$ a intrigué de nombreux mathématiciens et même engendré des tensions entre eux. Ils ont cherché à donner une valeur à cette somme $1-1+1-1+1+\cdots$.
Une première méthode simple pour donner une valeur à cette somme est de grouper par 2 ses termes,

$$S=(1-1)+(1-1)+\cdots=0$$

Et donc poser $S=0$.
mais on remarque que si on appelle S cette valeur, on peut aussi bien écrire

$$S=1-(1-1)-(1-1)-(1-1)+\cdots=1$$

Et donc poser $S=1$.
Autre idée, on peut écrire

$$1-S=1-(1-1+1-1+\cdots)=1-1+1-1+\cdots=S$$

Et donc poser $S=\frac{1}{2}$...
Bien sûr, écrire qu'une somme d'entiers n'est pas un entier est un peu choquant. Pourtant, cette valeur présente des avantages pour les mathématiciens. Proposée par Leibniz au 17è siècle, c'est la valeur qui avait la préférence de Léonhard Euler encore un siècle plus tard. Finalement, on constate sur ces 3 tentatives pour donner une valeur à S que

- On ne peut pas grouper dans une somme infinie quelconque les termes de la somme par paquets sans modifier la valeur de la somme,
- La somme $1-1+1-1+\cdots$ n'existe pas au sens qu'on lui a donné,

- Si on cherche quand même à donner une valeur à $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, une valeur plausible qui pourrait lui être attribuée serait $\frac{1}{2}$. Et cette valeur peut d'ailleurs aussi être obtenue d'une autre façon ; en effet notons pour $n \in \mathbb{N}$, σ_n la moyenne de $S_0, ..., S_n$. on a alors pour $p \in \mathbb{N}$, $\sigma_{2p} = \frac{1+0+1+\cdots+1}{2p+1} = \frac{p+1}{2p+1}$ et $\sigma_{2p+1} = \frac{1+0+1+\cdots+0}{2p+2} = \frac{p+1}{2p+2} = \frac{1}{2}$, donc la suite (σ_n) admet pour limite $\frac{1}{2}$.

Bilan de l'étude des séries géométriques : une somme d'une infinité de termes peut prendre une valeur finie, une valeur infinie, ou ne pas avoir de valeur du tout.

2. Le cas des séries de Riemann

C'est aussi Nicolas d'Oresme qui démontra le premier un résultat non intuitif sur les séries. On peut remarquer que si la suite (S_n) converge vers S, alors la suite (u_n) dont est issue la suite (S_n) par la relation $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ est nécessairement de limite nulle. En effet, on remarque que pour tout entier n non nul, $u_n = S_n - S_{n-1}$. Donc si (S_n) est une suite de limite S, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = S - S = 0$.
Il est légitime de se poser la question de la réciproque. On peut en effet penser que si (u_n) est une suite de limite nulle, alors la suite (S_n) va tendre vers une limite finie. Oresme prouva le contraire en démontrant que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ est une somme de valeur infinie. Voici son raisonnement : pour $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$, il considère

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

Il remarque que pour $k \in \mathbb{N}$

$$\sigma_k = \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

est une somme de $2^{k+1} - 2^k = 2^k$ termes tous supérieurs ou égaux au plus petit d'entre eux qui est $\frac{1}{2^{k+1}}$. Il en résulte que $\sigma_k \geqslant \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$, puis

$$S_{2^n} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}$$

Donc en sommant suffisamment de termes on peut dépasser n'importe quel nombre positif. Bien que les termes sommés soient de plus en plus proches de 0, la somme des inverses des n premiers entiers tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
Cette série s'appelle la série harmonique et est un cas particulier des séries de Riemann qui sont un pilier du programme de spé.
Parmi les séries de Riemann, une autre série est particulièrement intéressante, il s'agit de la série des carrés des inverses des entiers. Donc $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$.
Cette fois, il est simple de montrer que cette somme est finie. En effet, la suite (S_n) où
$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots \frac{1}{n^2}$ est une suite croissante de réels, donc si on montre qu'elle est majorée, alors on sait qu'elle tend vers une limite finie.
Or pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$. Donc pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$,

$$S_n \leqslant 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n}$$

Mais on peut aussi remarquer que pour $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, et donc il vient

$$S_n \leqslant 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

Et les termes de la somme de droite se simplifient en cascade ; il ne reste que $1 + 1 - \frac{1}{n}$. Si bien que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n \leqslant 2$$

Et donc la somme $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$ est finie.

Euler calcule sa somme exacte en 1741, venant mettre fin à près d'un siècle de recherche mathématique sur le sujet. De nombreuses méthodes sont accessibles désormais pour retrouver ce résultat et tout bon taupin connaît le remarquable résultat

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$